PROCEEDINGS OF IAM, V.6., N.2, 2017, pp.217-224

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ*

А.Б. Рамазанов[1], Е.В.Мамедова[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: ram-bsu@mail.ru

Резюме. В настоящей работе градиентный алгоритм применяется для некоторых задач распознавания образов. Предлагается несколько вариантов градиентного алгоритма. Показывается, что градиентный алгоритм позволяет построить комитетное решение. Кроме того, с помощью градиентного алгоритма, предлагается способ построения эталонного образа.

Ключевые слова: градиент, образ, алгоритм, оценка, эталон.

AMS Subject Classification: 74P10.

1. Введение.

Исследование распознавания образов является актуальной задачей (см., напр., [1, 15]). Во многих случаях образ является дискретным множеством. Поэтому задача распознавания образов часто является задачей дискретной оптимизации (см., напр., [15]). Для решения этой задачи применяется прямой и двойственный градиентный алгоритм. Отметим, что эти алгоритмы успешно применяются для добычи нефти газлифтным способом [4,2,7], где при определении гидравлического сопротивления в подъемнике, т.е. на насосно-компрессорных трубах, авторы [2,8] предлагают использование метода ортогонализации Грамм-Шмидта, которое дает более хороший результат [9,10,12].

Показано, как можно с помощью градиентного алгоритма построить эталонный образ. Кроме того, в терминах гарантированной оценки найдены условия, когда полученное решение является комитетным решением.

Пусть в пространстве признаков задан образ $X=\{x_1,...,x_m\}$. Элементы, как обычно, называют изображением. Каждому изображению сопоставлен вес $f_i(x_i), i=1,...,m$. Требуется найти подмножество изображений, в которых имеется наибольший суммарный вес.

В данной работе эта задача сводится к решению задач целочисленного программирования и применяется прямой и двойственный градиентный алгоритм для решения этой задачи. Анализируется точность этих алгоритмов. Кроме того, найдены условия, когда полученное решение является комитетным решением.

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.05.2017

Следует отметить, что решение называется комитетном [1, 15], если это решение распознает строго больше половины признаков. В терминах гарантированных оценок это означает, что погрешность градиентного алгоритма строго меньше 1/2.

2. Постановка задачи.

Рассматривается следующая задача А: найти

$$\max\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) : x = (x_1, ..., x_n) \in D \subseteq X, n \le m\},$$

где

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - 1)^2, \ \ x = (x_1, ..., x_n) \in D,$$

$$D = \{x \in B^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, a = (a_1, ..., a_n) \in R_+^n, b \in R_+^1, b > 0\},$$

$f(x)$ - неубывающая функция на множестве D, $x = (x_1,..., x_n) \in Z_+^n$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in R_+^n$, R_+^n (Z_+^n) - множество $n-$мерных действительных (целочисленных) неотрицательных векторов, $B^n = \{x = (x_1,..., x_n) : x_i = 0 \text{ или } 1\}$. Хорошо известно, что для точного решения задачи А неизвестны эффективные точные методы [11,14]. Поэтому для решения этих задач применяются локальные (градиентные) алгоритмы с гарантированной оценкой (см., например, [4, 6, 11,14,16]). В работе для решения задачи А предлагается прямой и двойственный градиентный алгоритм. Проводится сравнительный анализ двойственного и прямого градиентного алгоритма на примерах.

Рассмотрим несколько подходов классификации в задачах распознавания образов. Пусть $x = (x_1,..., x_n) \in B^n$, т.е. $x = (x_1,..., x_n)$ n- мерный булевой вектор. Обозначим через $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ норму вектора $x = (x_1,..., x_n)$.

Хеммингово расстояние $H(x, y)$ (см., напр., [14]) между векторами $x = (x_1,..., x_n) \in B^n$, $y = (y_1,..., y_n) \in B^n$ как обычно, определяется следующим образом

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| .$$

Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число L. Если $\|x\| \le L$, то

$x \in K_1$. Если $\|x\| > L$, то $x \in K_2$. Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число M. Если $H(x,y) \le M$, то $x \in K_1$. Если $H(x,y) > M$, то $x \in K_2$, где $y = (y_1,...,y_n)$ эталон (например, заданный априори, по опыту, алгоритмически и т. др.)

3. Алгоритмы

Опишем двойственный градиентный алгоритм для задачи А. Пусть $e^i = (e_1^i,...,e_n^i),$ где $e_i^i = 1, e_k^i = 0, i \ne k$, т.е. e^i i- й единичный n-мерный орт.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (1,...,1), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t) = \arg\min_i \{c_i - \alpha_i x_i^t + \alpha_i / 2 : i \in N\},\ x^{t+1} = x^t - e^{i(t)},\ N \leftarrow N \setminus \{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $x^{t+1} \in D$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t \leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Конец.

В результате работы этого алгоритма полученное решение обозначим через x^d. Следуя терминологии из [12,14] решение x^d будем называть двойственным градиентным решением задачи А.

Если $\|x^d\| > n/2$, то x^d, следуя терминологии из [1, 15], будем называть комитетным решением задачи А. Другими словами, двойственный градиентный алгоритм позволяет распознавать строго больше половины изображений.

Градиентное решение (т.е. полученное с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема [см., напр., [12,6, 14,16]), полученное с помощью следующего алгоритма, обозначим через x^g.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (0,...,0), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t) = \arg\max_i \{c_i - \alpha_i x_i^t + \alpha_i / 2 : i \in N\},\ x^{t+1} = x^t + e^{i(t)},\ N \leftarrow N \setminus \{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $fes(x^{t+1}, D) = \{i \in \{1,2,...,n\} : x^{t+1} + e^i \in D\} = \varnothing$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t \leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Конец.

Опишем еще один двойственный градиентный алгоритм для задачи А.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (1,...,1), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t)=\arg\min_i \left\{ \frac{2c_i-2\alpha_i x_i^t+\alpha_i}{a_i} : i\in N \right\},\ x^{t+1}=x^t-e^{i(t)},\ N\leftarrow N\setminus\{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $x^{t+1}\in D$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t\leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Конец.

В результате работы этого алгоритма полученное решение обозначим через x^{dd}.

Другим применением градиентного алгоритма в задачах распознавания может быть использование гарантированной оценки. Пусть x^* – оптимальное решение задачи А. Как обычно, под гарантированной оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи А понимается такое число $\varepsilon\ge 0$, что

$$\frac{f(x^*)-f(x^g)}{f(x^*)-f(0)}\le\varepsilon .$$

Известно (см., [12,16]), что в наихудшем случае

$$\varepsilon=(1-1/h)^r, \tag{1}$$

где

$$h=\max\{x_1+...+x_n : x=(x_1,...,x_n)\in D\},$$

$$r=\min\{x_1+...+x_n : x=(x_1,...,x_n)\in Z_+^n\setminus D\}.$$

Причем, оценка (1) улучшаема [16].

Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число L. ε гарантированные оценки прямого градиентного алгоритма для задачи А. Если $\varepsilon\le L$, то $x^g\in K_1$. Если $\varepsilon>L$, то $x^g\in K_2$.

Градиентный алгоритм может быть применен и для построения эталона. Пусть $A_1,...,A_m$ различные модификации градиентного алгоритма. $x^{A_1},...,x^{A_m}$ - решения, построенные с помощью этих алгоритмов и $\varepsilon(A_1),...,\varepsilon(A_m)$ гарантированные оценки алгоритмов $A_1,...,A_m$.

Тогда находим $\max\{\|x^{A_1}\|,...,\|x^{A_m}\|\}=x^{A_k}$. Решение x^{A_k} объявляем эталоном. Аналогично находим, что $\min\{\varepsilon(A_1),...,\varepsilon(A_m)\}=\varepsilon(A_q)$. Тогда решение x^{A_q} объявляем эталоном. Приведем примеры.

4. Примеры.

Пример 1. Пусть

$$f(x)=f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2-x_1^2-x_2^2\to\max,\ x\in D,\ n=2,$$

$$D = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 1,\ x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема имеем $x^g = (1,0)$. И из двойственного алгоритма получаем $x^d = (0,1)$. Отметим, что для этой задачи оптимальное решение равно $x^* = (1,0) = x^g$. Так как $\|x^d\| = \|x^g\| = 1$, то x^d, x^g не является комитетным решением для задачи А.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max,\ x \in D,\ n = 3,$$
$$D = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \le 2,\ x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема, имеем $x^g = (1,0,1)$. Из двойственного алгоритма, находим $x^{dd} = (1,0,1) = x^d$. Так как $\|x^{dd}\| = \|x^g\| = 2 > n/2 = 1.5$, то x^{dd}, x^g является комитетным решением для задачи А.

Пример 3. Пусть

$$\max\{ f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3,\ x_1, x_2, x_3 = 0 \vee 1\},\ L = 1/3.$$

Тогда

$$x^g = (0,0,1), x^* = (1,1,0),\ f(x^g) = 4,\ f(x^*) = 5, h = 2, r = 1.$$

Из (1), имеем $\varepsilon = (1 - 1/2) = 1/2 > 1/3$. То есть, $x^g \in K_2$.

Пример 4. Пусть рассматривается задача

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max,\ x \in D,\ n = 2,$$
$$D = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 1,\ x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема имеем $x^g = (1,0)$. Из двойственного алгоритма находим $x^d = (0,1)$. Тогда $\|x^g\| = \|x^d\| = \|x^{dd}\| = 1$. Поэтому любое из этих решений может быть принято эталоном.

Литература

1. Ablow C.M., Kaylor D.J. A committee solution of the pattern recognition problem, IEEE Trans., 1965, V.71, N. 5.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.

3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and ILL-posed problems, V. 23, N.5, 2015, pp.511-518.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas lift process. Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.
5. Kızılateş G., Nuriyeva F., Kutucu H. A tour extending hyper-heuristic algorithm for the traveling salesman problem, Proceedings of IAM , V.4, N.1, 2015, pp.8-15.
6. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions, Discrete Mathematics and Applications, V.21, N.4, 2011, pp.465–476.
7. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.1, 2013, pp.3-10.
8. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азербайджана, Т. LXX, N.1, 2014, с.19-22.
9. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для нелинейных систем. Мехатроника,Автоматизация,Управление. 2012, N.6 (135), с.2-6.
10. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Оптимизация периодических систем с обратной связью по выходной переменной. Доклады АН Аз. ССР, T.XLİV, N.4, 1988, с.3-6.
11. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи, М., Мир, 1982, 416 с.
12. Дюбин Г.Н., Корбут А.А. Жадные алгоритмы для задачи о ранце: поведение в среднем, Сибирский журнал индустриальной математики, Т. 2, N. 2(4), 1999, с. 68-93.
13. Исмаилов Н.А., Темирбекова Л.Н. Алгоритм решения задачи идентификации дискретно-линейных систем в стационарном случае. Proceedings of IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170.
14. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации, Изд-во Университетское, Минск, 1987, 222 с.
15. Мазуров В.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации, М., Наука, 1990, 248 с.
16. Рамазанов А.Б. Об оценке градиентного экстремума с помощью параметризации градиентного алгоритма, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.214-220.

Application of a gradient algorithm in some problems for recognition of images

A.B. Ramazanov[1], Y.V.Mamedova[1]

[1]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: ram-bsu@mail.ru

ABSTRACT

In this work the gradient algorithm is applied to some problems of recognition of images. Several options of a gradient algorithm are offered. It is shown that the gradient algorithm allows to construct the committee solution. Using the gradient algorithm we propose the method for constructing a reference image.

Keywords: gradient, image, algorithm, errors, standard.

References

1. Ablow C.M., Kaylor D.J. A committee solution of the pattern recognition problem, IEEE Trans., 1965, V.71, N. 5.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.
3. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and ILL-posed problems, V. 23, N.5, 2015, pp.511-518.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas lift process. Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.
5. Kızılateş G., Nuriyeva F., Kutucu H. A tour extending hyper-heuristic algorithm for the traveling salesman problem, Proceedings of IAM , V.4, N.1, 2015, pp.8-15.
6. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions, Discrete Mathematics and Applications, V.21, N.4, 2011, pp.465–476.
7. Aliev F.A., Ismailov N.A. Algoritm vychisleniya koeffisiyenta gidravlicheskogo soprotivleniya v gazliftnom prosesse. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.1, 2013,pp.3-10. (Aliev F.A., Ismailov N.A. Hydraulic resistance coefficient calculation algorithm in the gaz lift process, Proceedings of the IAM, V.2, N.1, 2013, pp.3-10.) (in Russian).
8. Aliev F.A., Ismailov N.A. Algoritm vychisleniya koeffisiyenta gidravlicheskogo soprotivleniya v gazliftnom prosesse, Dokladi NAN Azerbaydjana, T. LXX, №1, 2014, s.19-22. (Aliev F.A.,Ismailov N.A.

Hydraulic resistance coefficient calculation algorithm in the gaz lift process. Rep. of NAS Azerbaijan, V. LXX, N.1, 2014, pp.19-22.) (in Russian).

9. Aliev F.A., Ismailov N.A. Ob odnom metode linearizasii dlya nelineynikh system. Mekhatronika, Avtomatika, Upravlenie. 2012, N. (135), s.2-6. (Aliev FA, Ismailov NA On a method of linearization for nonlinear systems, Mechatronics, Automation, Control, 2012, N.6 (135), pp.2-6) (in Russian).
10. Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimizasiya periodicheskikh system s obratnoy svyaz'yu po vikhodnoy peremennoy. Doklady AN Az.SSR T. XLİV,N.4, 1988, s.3-6.(Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization of periodic systems with feedback on the output variable. Reports of NAS Az. SSR, v.XLİV, N4, 1988, pp.3-6.) (in Russian)
11. Gary M., Johnson D. Vichislitelniye mashini i trudno reshayemiye zadachi, M., Mir, 1982, 416 s. (Gary M., Johnson D. Computers and hard to solve problems, M: Mir., 1982, 416 p.) (in Russian).
12. Dyubin G.N., Korbut A.A. Jadniye algoritmi dlya zadachi o rantse: povedeniye v srednem, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, T. 2, N 2(4), 1999, s.68-93. (Dyubin G.N., Korbut A.A. Greedy algorithms for a problem about a satchel: behavior on average, Siberian journal of Industrial Mathematics, V.2, N.4, 1999, pp.68-93.) (in Russian).
13. Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Algoritm resheniya zadachi identifikasii diskretno-lineynix system v stasionarnom sluchae, Proceedings of the IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170. (Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Calculation algorithm for identification problem of discrete linear system in stasionar case, Proceedings of the IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170) (in Russian).
14. Kovalev M.M. Matroidi v diskretnoy optimizasii, Izd-vo Universitetskoe, Misk, 1987, 222 s. (Kovalev M.M. Matroids in discrete optimization, Pub. Universitetskoe, 1987, 222 p.)(in Russian).
15. Mazurov V.D. Metod komitetov v zadachax optimizachii I klassifikachii, M., Nauka, 1990, 248 s. (Mazurov V.D. The committee method in the optimization and classification problem, M., Nauka, 1990, 248 p.) (in Russian).
16. Ramazanov A.B. Ob ochenki gradiyentnogo ekstremuma s pomoshyu parametrizasii gradiyentnogo algoritma, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, s.214-220. (Ramazanov A.B. On a estimation of the gradient extremum by the help of parametrization of the gradient algorithm, Proceedings of IAM , V. 4, N 2, 2015, pp.214-220) (in Russian).